A hatványozás pozitív egész kitevő esetén

Az ismételt szorzást hatványozásként rövidítjük.

Pl.: $7\cdot7\cdot7$ helyett azt írjuk, hogy 7^3.

A hatványalap a 7, a hatványkitevő a 3. A hatvány értéke: $7^3 = 243$

Nyilvánvaló, hogy a 7-t nem tudom önmagával 2,5- szer megszorozni. Nem csak a hetet, de más számot sem!). (- 3)-szor sem tudjuk önmagával megszorozni. Tehát a kitevő csak pozitív egész szám lehet.

A pozitív egész kitevőjű hatvány definíciója: a^n (*a* az n-ediken) olyan *n* tényezős szorzat, amelynek minden tényezője *a*. (Másképpen: a^n azt jelenti, hogy az a-t n-szer szorzom önmagával.)

Az *a* bármilyen valós szám lehet, az *n* pedig csak pozitív egész szám lehet. ($a \in R$; $n \in N^+$)

Azonosságok:

Ha számolgatunk a hatványokkal, észrevehetünk eljárást, amivel gyorsabbá tehetjük a munkát.

1. Azonos alapú hatványok szorzata:

$$7^3 \cdot 7^2 = \underbrace{7\cdot7\cdot7}_{7^3}\cdot\underbrace{7\cdot7}_{7^2} = \overbrace{7}^{1}\cdot\overbrace{7}^{2}\cdot7\cdot7\cdot7\cdot\overbrace{7}^{5} = 7^5$$

Sejtés: Azonos alapú hatványok szorzatát megkapjuk, ha az alapot a kitevők összegére emeljük.

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

Mivel a matematika nem hittan, ezért a sejtéseket csak akkor használhatjuk, ha bebizonyítjuk, hogy általánosan is igaz.

Bizonyítás:$a \in R$ $n;m \in N^+$

$$a^n \cdot a^m := \underbrace{\overbrace{a}^{1.}\cdot\overbrace{a}^{2.}\cdot\ldots\cdot\overbrace{a}^{n.}}_{a^n}\cdot\underbrace{\overbrace{a}^{1.}\cdot\overbrace{a}^{2.}\cdot\ldots\cdot\overbrace{a}^{m.}}_{a^m} = \overbrace{a}^{1.}\cdot\overbrace{a}^{2.}\cdot\ldots\cdot\overbrace{a}^{n+m} := a^{n+m}$$

2. Nézzük meg, hogy mi történik, ha azonos kitevőjű hatványokat szorzunk:

$$7^3\ 5^3 := \underbrace{7\cdot7\cdot7}_{7^3}\cdot\underbrace{5\cdot5\cdot5}_{5^3} = 7\cdot5\cdot7\cdot5\cdot7\cdot5 = (7\cdot5)\cdot(7\cdot5)\cdot(7\cdot5) = (7\cdot5)^3$$

$\Uparrow$

A szorzás kommutatív és asszociatív művelet.

Sejtés: Azonos kitevőjű hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.

$\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$ $\quad a \in R \quad n \in N^+$

Bizonyítás:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{\overset{1.}{a} \cdot \overset{2.}{a} \cdot \ldots \cdot \overset{n.}{a}}_{a^n} \cdot \underbrace{\overset{1.}{b} \cdot \overset{2.}{b} \cdot \ldots \cdot \overset{n.}{b}}_{b^n} = \overset{1.}{\overbrace{(a \cdot b)}} \cdot \overset{2.}{\overbrace{(a \cdot b)}} \cdot \ldots \overset{n.}{\overbrace{(a \cdot b)}} = (a \cdot b)^n$$

$\Uparrow$

A szorzás asszociatív és kommutatív.

Általában visszafelé használjuk: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Szorzatot úgy hatványozunk, hogy minden tényezőt hatványozunk.

3. Azonos kitevőjű hatványokat oszthatunk is:

$$\frac{7^3}{5^3} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} = \left(\frac{7}{5}\right)^3$$

Visszafelé: $\left(\frac{7}{5}\right)^3 = \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{7^3}{5^3}$

Sejtés: Törtet úgy hatványozunk, hogy külön hatványozzuk a számlálót, és külön hatványozzuk a nevezőt.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Fordítsuk meg! Úgy gyakrabban használjuk. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad b \neq 0$

Bizonyítás: $\left(\frac{a}{b}\right)^n := \overset{1.}{\frac{a}{b}} \cdot \overset{2.}{\frac{a}{b}} \cdot \ldots \cdot \overset{n.}{\frac{a}{b}} = \frac{\overset{1.}{a} \cdot \ldots \cdot \overset{n.}{a}}{\overset{1.}{b} \cdot \ldots \cdot \overset{n.}{b}} := \frac{a^n}{b^n}$

4. Mi van, ha hatványt hatványozunk?

Pl.: $(9^3)^2 := 9^3 \cdot 9^3 := (9 \cdot 9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9 \cdot 9) = 9^6 = 9^{3 \cdot 2}$

Sejtés: Hatványt úgy hatványozunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

$\boxed{(a^n)^k = a^{n-k}}$

Bizonyítás:

$$\left(a^n\right)^k := \underset{1.}{a^n} \cdot \underset{2.}{a^n} \cdot \ldots \cdot \underset{k.}{a^n} = \left(\underset{1.}{a} \cdot \ldots \cdot \underset{n.}{a}\right) \cdot \left(\underset{1.}{a} \cdot \ldots \cdot \underset{n.}{a}\right) \cdot \left(\underset{1.}{a} \cdot \ldots \cdot \underset{n.}{a}\right) = \underset{1.}{a} \cdot \ldots \cdot \underset{n\cdot k}{a} := a^{n\cdot k}$$

5. Azonos alapú hatványokat oszthatunk is.

$$\frac{9^5}{9^3} = \frac{\cancel{9} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{9} \cdot 9 \cdot 9}{\cancel{9} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{9}} = 9^2 = 9^{5-3}$$

Sejtés: Az azonos alapú hatványok hányadosát megkapjuk, ha az alapot a kitevők összegére emeljük.

De mi van, ha lent vannak többen?

$$\frac{9^3}{9^5} = \frac{\cancel{9} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{9}}{\cancel{9} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{9} \cdot 9 \cdot 9} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{9^{5-3}}$$

Ha úgy számolnánk, mint az előbb, akkor negatív kitevőt kapnánk: $\frac{9^3}{9^5} = 9^{3-5} = 9^{-2}$
Igen ám de azt nem értelmeztük. A sejtéssel akkor is bajba kerülünk, ha a számláló és a nevező kitevője ugyanaz.

$$\frac{9^3}{9^3} = 9^{3-3} = 9^0 \qquad \frac{9^3}{9^3} = \frac{9 \cdot 9 \cdot 9}{9 \cdot 9 \cdot 9} = 1$$

Kénytelenek vagyunk három esetre bontani az azonos alapú hatványok hányadosát.

$$\frac{a^n}{a^m} = \begin{cases} a^{n-m} & n > m \\ 1 & n = m \\ \dfrac{1}{a^{m-n}} & n < m \end{cases}$$

Hát ez a képlet eléggé csúnyácska. Viszont ha átgondoljuk a tapasztaltakat, akkor kiterjeszthetjük a hatványozást 0, és negatív kitevőre, úgy hogy a kiterjesztés összhangban legyen a már bizonyított azonosságokkal.