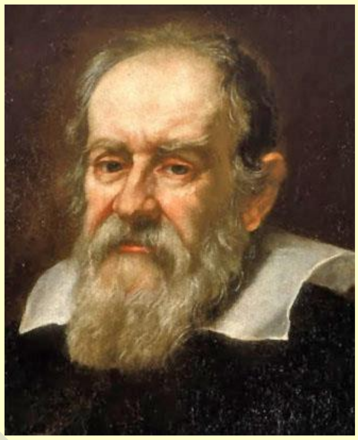
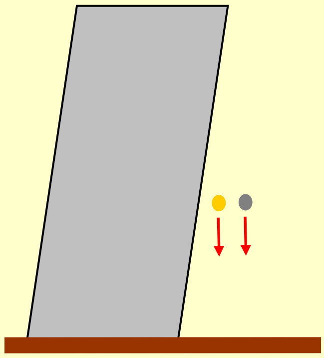
A szabadesés

Ha elengedünk egy tárgyat, esni kezd. Ha megfigyeljük egy méter magasabbról leejtett tárgy esését, akkor azt láthatjuk, hogy egyre gyorsabban mozog. A szabadesést Galilei tanulmányozta először olyan módon, amit ma is kísérletnek nevezünk.



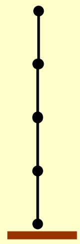


Ejts le egy krétát és egy radírt egyszerre és ugyanolyan magasról! Mit tapasztalsz?

Mindig egyszerre érnek le.

Ha egy papírlapot ejtesz le egyszerre a radírral, akkor azt tapasztalhatod, hogy a papírlap később ér le. Miért?

A papírlap felülete nagy a tömegéhez képest, ezért a levegő ellenállása nagyon lefékezi. Ha összegyűröd a papírlapot, akkor együtt esik a radírral.



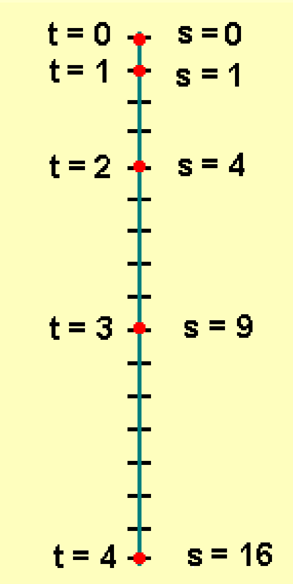
Egy madzagra egyenlő távolságokra horgászólmokat rögzítünk. Megfogjuk a legfelsőt, a legalsót a padlóhoz érintjük és elengedjük a legfelsőt.
A koppanások egyre gyorsabban követik egymást, ezért a mozgás nem lehet egyenletes.

Kísérleti tapasztalat: A földfelszín közelében minden szabadon eső test ugyanúgy esik, ha a közegellenállás elhanyagolható. A mérések szerint egyenletesen gyorsulnak, és ugyanakkora a gyorsulásuk: $a = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$.

Ezt nehézségi gyorsulásnak, vagy gravitációs gyorsulásnak nevezzük. Jele: g.

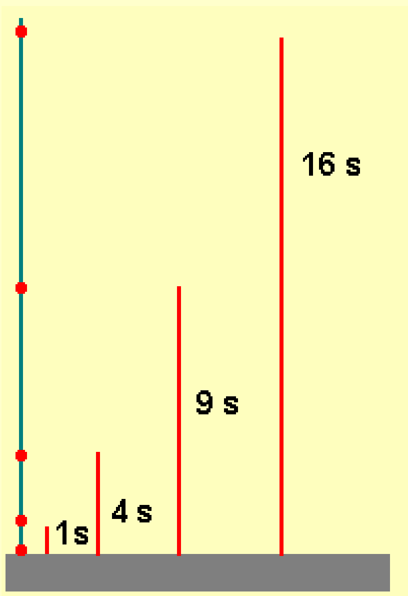
Ha nem kérik, hogy a pontos értékkel számoljunk, akkor g-t $10\ \frac{m}{s^2}$-nek vesszük. Ez azt jelenti, hogy **a szabadon eső test sebessége másodpercenként 10 m/s-mal növekedik.** A mérés nem könnyű (mert nagyon kicsi időtartamokat kell mérni), de azt hogy a szabadesés egyenletesen változó mozgás könnyen ellenőrizhetjük.

Mi is tudjuk ellenőrizni, hogy a szabadesés egyenletesen gyorsuló mozgás! Tudjuk, hogy az egyenletesen változó mozgásoknál az egymást követő egyenlő időközök alatt befutott utak úgy aránylanak egymáshoz, mint az egymást követő páratlan számok.

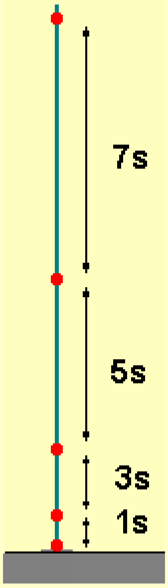


Ha az első másodperc alatt megtett utat egységnyinek tekintjük, akkor a baloldali rajz ábrázolja a másodpercenként megtett utakat.
A jobboldali rajzon fejre állítottuk az ábrát. Ha ilyen távolságokból ejtünk le golyókat, akkor a legfelső golyó 4 másodpercig, az alatta levő 3 s-ig és így tovább esik.
Ha egyszerre ejtenénk le a négy golyót, akkor másodpercenként koppannának.

Hogyan lehet a legkönnyebben megoldani, azt hogy egyszerre induljanak a golyók?



Egy hajlékony zsinór végére rögzítünk egy ólomgolyót, majd a következőt attól pl. 7 cm-re, a másodikat az elsőtől 21 cm-re, és így tovább rendre 35 cm, 49 cm, 63 cm távközökkel. A kapott Morelli-féle ejtő zsinórt az ábrának megfelelően ejtsük le. A golyók egyenlő időközönként koppannak. Tehát az egymást követő ugyanakkora időtartamok alatt befutott utak úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan számok.



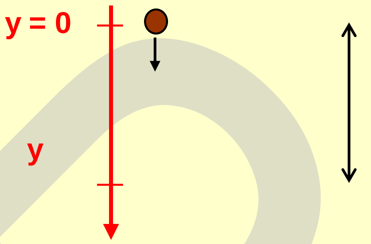
Ez azt is jelenti, hogy a szabadon eső test útja az eltelt idővel négyzetesen arányos.

A gravitációs gyorsulás függ a Föld felszíne feletti magasságtól, a Föld tömegeloszlásától. Majd később megvizsgáljuk, hogy pontosan mitől és miért.
Mivel a mozgás egyenletesen gyorsuló, csak be kell írni a gravitációs gyorsulást a megfelelő sebesség-idő és út-idő függvénybe.

$$v = a \cdot t \quad \Rightarrow \quad v = g \cdot t$$

$$s = \frac{a}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{g}{2}t^2$$

Mivel a mozgás egy egyenes mentén megy végbe, a hely megadásához elég egy koordináta tengely (legyen ez az y tengely). Az út és az elmozdulás nagysága ugyanakkora és az út a hely koordinátával is megegyezik, ha az ejtés helyénél vesszük nullának az y koordinátát!



$$y = \left|\Delta \vec{r}\right| = s$$

Olvasnivaló: Szabadesés a Holdon
A szabadesés világrekordja.

Filmek:

Kittinger szabadesése

Baumgartner szabadesésben túllépte a hangsebességet

Toll és kalapács szabadesése a Holdon

Sulinet

Mintafeladatok:

1. Mekkora a szabadon eső test sebessége az esés utáni 1., 2., 3., 4. másodpercben és hol van?

1. mo. (IQ):

A szabadon eső test sebessége másodpercenként 10 m/s-mal növekedik.

A test sebessége:

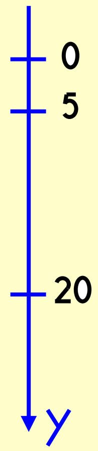
Az első másodperc időpillanatban: 0 + 10 m/s = 10 m/s

A második másodperc időpillanatban: 10 m/s + 10 m/s = 20 m/s

A harmadik másodperc időpillanatban: 20 m/s + 10 m/s = 30 m/s

A negyedik másodperc időpillanatban: 30 m/s + 10 m/s = 40 m/s

Az első másodperc (időtartam) alatt megtett út ($s = \frac{v \cdot t}{2}$): $s_1 = \frac{10\frac{m}{s} \cdot 1s}{2} = \underline{\underline{5\,m}}$



Az első két másodperc alatt megtett út: $s_2 = \frac{20\frac{m}{s} \cdot 2\,s}{2} = \underline{\underline{20\,m}}$

Az első három másodperc alatt megtett út: $s_3 = \frac{30\frac{m}{s} \cdot 3\,s}{2} = \underline{\underline{45\,m}}$

Az első négy másodperc alatt megtett út: $s_4 = \frac{40\frac{m}{s} \cdot 4\,s}{2} = \underline{\underline{80\,m}}$

Akár fejben is kiszámolhattuk volna!

2. mo.:

Helyettesítsünk be a hely-idő és a sebesség- idő függvényekbe! $v = g \cdot t$ $s = \frac{g}{2}t^2$

A legkevesebbet akkor kell írni, ha készítünk egy táblázatot:

t(s)	1	2	3	4
v (m/s)	10	20	30	40
y (m)	5	20	45	80

2. Mennyit változik a szabadon eső test sebessége az esés 2. és 5. másodperc idő pillanata között és mekkora utat tesz meg?

Megtanultad a képleteket? Az ismert mennyiségek jelét kékkel írd.

$t_1 = 2\,s$ $\underline{t_2 = 5\,s}$ $\Delta v\ ;\ s = ?$	$v = g \cdot t$ $s = \frac{g}{2}t^2$ $v_1 = 10\frac{m}{s^2} \cdot 2\,s = 20\frac{m}{s}$ $y_1 = \frac{10\frac{m}{s^2}}{2} 4\,s^2 = 20\,m$ $v_2 = 10\frac{m}{s^2} \cdot 5\,s = 50\frac{m}{s}$ $y_1 = \frac{10\frac{m}{s^2}}{2} 25\,s^2 = 125\,m$ $\Delta v = v_2 - v_1 = \underline{\underline{30\ \frac{m}{s}}}$ $\Delta y = y_2 - y_1 = \underline{\underline{95\ m}}$

3. A 33 m magas 10. emeleti erkélyről lejtünk egy kulcsot. Mennyi ideig esik? Mekkora sebességgel ér le?

Vedd fel az adatokat, írdd fel a szabadesés egyenleteit, és vizsgáld meg, hogy mit lehet kiszámolni!

$\underline{s = 33\ m}$ $t\ ;\ v\ = ?$	$v = g \cdot t \qquad s = \frac{g}{2} t^2$ **A helyből kiszámolhatjuk az időt, az időből pedig a sebességet.** $y = \frac{g}{2} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 33\,m}{10\,\frac{m}{s^2}}} = \underline{\underline{2{,}6\,s}}$ $v = g \cdot t = 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 2{,}6\,s = \underline{\underline{26\,\frac{m}{s}}} = 92{,}48\,\frac{km}{h}$

Ez már nagyon komoly balesetet okozhat!

Vedd észre! Ha 100 km/h sebességgel nekiütközöl egy nagy fának, az ugyanaz, mintha leugratnál a kocsival a tizedik emeleti háztetőről!

4. Milyen magasról esett le a jégcsap, ha 2 másodpercig esett? Mekkora sebességgel csapódott be?

Ha felírod a szabadesésre vonatkozó egyenleteket és megnézed, hogy mi az ami adott, akkor láthatod, hogy csak be kell helyettesíteni az egyenletekbe.

$\underline{t = 2\ s}$ $h = ?$	$v = g \cdot t \qquad s = \frac{g}{2} t^2$ $v = g \cdot t = 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 2\,s = \underline{\underline{20\,\frac{m}{s}}}$ $y = \frac{g}{2} t^2 = \frac{10\,\frac{m}{s^2}}{2} \cdot 4\,s^2 = \underline{\underline{20\,m}}$

Tehát 20 m magasról esett le a test és 20 m/s sebességgel csapódott be.

5. Milyen magasról esett le a 10 m/s sebességgel becsapódó kókuszdió?

Írdd fel a szabadesésre vonatkozó egyenleteket és az ismert mennyiségek jelét kékkel írd!

$\underline{v = 10\ m/s}$ $h = ?$	$v = g \cdot t \qquad s = \frac{g}{2} t^2$ **A sebesség-idő függvényből kiszámolhatjuk, hogy a test mennyi idő alatt gyorsult fel az adott sebességre.**

	$t=\frac{v}{g}=\frac{10\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}}=\underline{\underline{1\,s}}$ **Az időt csak be kell helyettesíteni a helyet megadó idő-függvénybe.** $s=\frac{g}{2}t^2=\frac{10\frac{m}{s^2}}{2}\cdot 1s^2=\underline{\underline{5\,m}}$

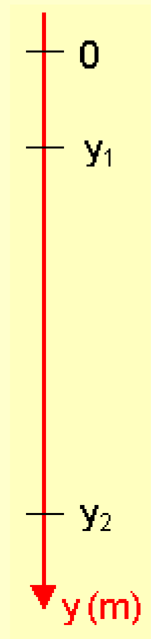
2. mo:

A 10 m/s² –es gyorsulással 1 másodperc alatt gyorsul fel a test 10 m/s sebességre. A megtett út

$$t=\frac{v}{g}=\frac{10\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}}=\underline{\underline{1\,s}} \qquad s=\frac{v\cdot t}{2}=\frac{10\frac{m}{s}\cdot 1s}{2}=\underline{\underline{5\,m}}$$

6. Egy szabadon eső test sebessége egy pontban 20 m/s, egy másik pontban 40 m/s. Mekkora a két hely távolsága? Menyi idő alatt jut el az egyik pontból a másikba? Honnan esett a test?

Képzeld el, hogy mi történik! Az esés megkezdése után t_1 másodperccel a sebesség 20 m/s, t_2 másodperccel 40 m/s.

v_1 = 20 m/s v_2 = 40 m/s Δt ; y_2 = ?	$v=g\cdot t \qquad s=\frac{g}{2}t^2$ **A sebesség-idő függvényből kiszámolhatjuk, hogy a test mennyi idő alatt gyorsult fel az adott sebességre.** $t_1=\frac{v_1}{g}=\frac{20\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}}=2\,s \qquad t_2=\frac{v_2}{g}=\frac{40\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}}=4\,s$ **A test a két pont között $\Delta t = t_2 - t_1 = 2$ másodpercet esett. Az időket csak be kell helyettesíteni a helyet megadó idő-függvénybe.** $y_1=\frac{g}{2}t_1^2=\frac{10\frac{m}{s^2}}{2}\cdot 4\,s^2=\underline{\underline{20\,m}}$ $y_2=\frac{g}{2}t_2^2=\frac{10\frac{m}{s^2}}{2}\cdot(4\,s)^2=\underline{\underline{80\,m}}$	

A két pont távolsága: 80 m – 20 m = $\underline{\underline{60\text{ m}}}$. A test a második pont felett 80 méterről esett le.

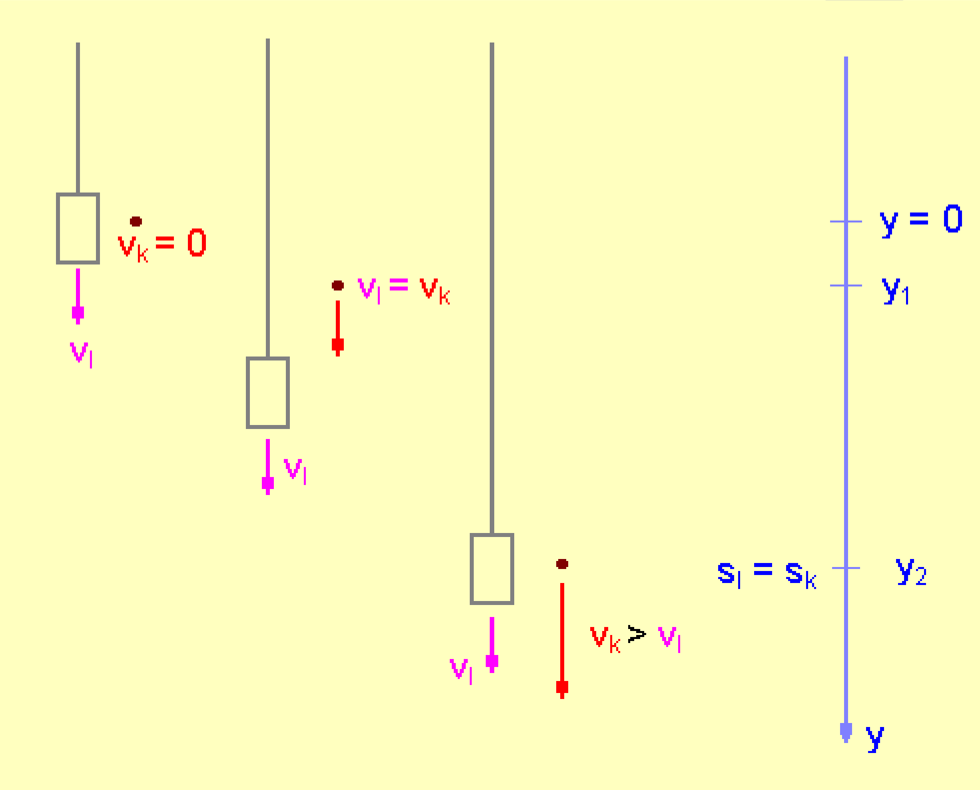
Megjegyzés:

Józan paraszti ésszel (ha ismerjük a képleteket), gyorsabban is megoldható a feladat: Az esés megkezdése után 2 másodperccel lesz a sebesség 20 m/s, 4 másodperccel 40 m/s ($t = \frac{v}{g}$).

Az esés közben megtett utak ($s = \frac{v \cdot t}{2}$ vagy $s = 5t^2$) 20 m ill. 80 m . Tehát a test a két pont között 4 – 2 = 2 s alatt 80 m – 20 m = 60 m utat tesz meg.

7. Amikor mellénk ér a 10,8 km/h sebességű lift leejtünk mellette egy követ. Mikor és hol éri utol a kő a liftet? Ekkor menyi a kő sebessége? Hol van akkor a kő, amikor a sebessége megegyezik a liftével? Ábrázolja a sebességeket és az utakat az idő függvényében!

Képzeld el a folyamatot. A lift elmegy mellettünk. Elengedjük a követ. A kő álló helyzetből gyorsulva elindul a lift után. Amikor utoléri a liftet, már nagyobb a sebessége, mint a lifté.



Számoljuk ki, hogy hol és mikor egyenlő a kő sebessége a liftével!

$v_{kő}$ = 10,8 km/h = 3 m/s

$$v = g \cdot t \Rightarrow t_1 = \frac{v}{g} = \frac{3\,\frac{m}{s}}{10\,\frac{m}{s^2}} = \underline{\underline{0{,}3\,s}}$$

$$y_1 = \frac{g}{2} t_1^2 = \frac{10\,\frac{m}{s^2}}{2} (0{,}3\,s)^2 = \underline{\underline{0{,}45\,m}}$$

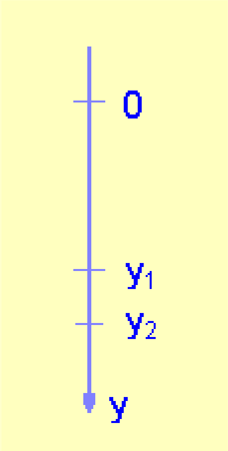
A kő 45 cm-t esik, amíg a sebessége eléri a liftét.

Amikor a kő utoléri a liftet, ugyanakkora utat futottak be.

$$v_I \cdot t_2 = \frac{g}{2} t_2^2 \Rightarrow 3\frac{m}{s} \cdot t_2 = \frac{10\frac{m}{s^2}}{2} \cdot t_2^2 \Rightarrow t_2 = \underline{\underline{0{,}6\,s}}$$

$$y_2 = v_I \cdot t_2 = 3\frac{m}{s} \cdot 0{,}6\,s = \underline{\underline{1{,}8\,m}}$$

8. Egy szabadon eső test a mozgás utolsó másodpercében 45 m-t esett. Honnan indult? Mennyi ideig esett?



$$y_2 - y_1 = 45\text{ m} \qquad t_2 - t_1 = 1\text{ s}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{g}{2} t_2^2 - \frac{g}{2} t_1^2 \Rightarrow 45\,m = 5\left(t_1 + 1\right)^2 - 5t_1^2 \quad /:5$$

$$9 = t_1^2 + 2t_1 + 1 - t_1^2 \quad /-1$$

$$8 = 2t_1 \quad \Rightarrow t_1 = 4\,s$$

$$\underline{\underline{t_2 = 5\,s}}$$

$$y_2 = \frac{g}{2} t_2^2 = 5\frac{m}{s^2} 25\,s^2 = \underline{\underline{125\,m}}$$

9. Egy 30 m mély kútba követ dobunk. Mennyi idő múlva halljuk a csobbanást, ha a hang sebessége 340 m/s?

A kő szabadeséssel megtesz 30 métert, majd a hang is állandó sebességgel megtesz 30 métert.

$y = s = 30\text{ m}$ $\underline{v_{hang} = 340\text{ m/s} \equiv c}$ $t = ?$	$v = g \cdot t \qquad s = \frac{g}{2} t^2$ $y = \frac{g}{2} t_1^2 \Rightarrow 2y = g t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30\,m}{10\frac{m}{s^2}}} = 2{,}45\,s$ $y = c \cdot t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{y}{c} = \frac{30\,m}{340\frac{m}{s}} = 0{,}09\,s \quad \Rightarrow t = t_1 + t_2 = \underline{\underline{2{,}54\,s}}$

10. Bizonyítsa be, hogy helyes Galilei 1683-ban megfogalmazott állítása:
a szabadon eső test által egyenlő időközönként megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint a páratlan számok 1-től kezdődően.

Írjuk fel a Δt időközönként megtett utakat!

$$s_1 = \frac{g}{2} \Delta t^2$$

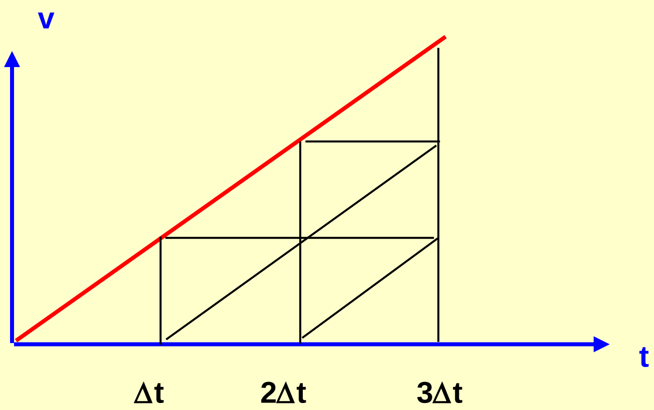
$$s_2 = \frac{g}{2}(2\Delta t)^2 - \frac{g}{2}\Delta t^2 = 3 \cdot \frac{g}{2}\Delta t^2 = 3 s_1$$

$$s_3 = \frac{g}{2}(3\Delta t)^2 - \frac{g}{2}(2\Delta t)^2 = 9 \cdot \frac{g}{2}\Delta t^2 - 4 \cdot \frac{g}{2}\Delta t^2 = 5 \cdot \frac{g}{2}\Delta t^2 = 5 s_1 \; \ldots$$

Mivel a g gyorsulás helyére bármilyen gyorsulást beírhatunk, az állítás minden egyenletesen gyorsuló mozgásra igaz.

Grafikusan is megoldhatjuk a feladatot:

A sebesség idő grafikonon a görbe alatti terület megadja a megtett utat. Ha egyenlő időközönkénti részekre osztjuk a görbe alatti területeket, és ezeket a területeket fel tudjuk bontani megfelelő darabszámú ugyanolyan nagyságú részekre, akkor beláttuk az állítást.



A gyorsulás nagyságától függetlenül a görbe alatti területet megfelelő számú egybevágó háromszögre bontottuk, ezért az állítás minden egyenletesen gyorsuló mozgásra igaz.